Министерство образования Самарской области

АССОЦИАЦИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ "ИНСТИТУТ НАПРАВО.РУ"

УТВЕРЖДЕНО
Приказ директора
от 07.08.2024 № 012/2/с

Воробьев К.А.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ОП.04 Численные методы

Специальность 09.02.10 Разработка компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности
Квалификация: разработчик компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности
Форма обучения: очная
На базе основного общего образования
Срок получения образования: 3 года 10 месяцев

Тольятти, 2024г.

Содержание

1. Назначение и организация практикума 3

2. Состав работ и представление результатов 3

3. Практические работы 3

Работа 1. Погрешность и достоверные цифры 3

Работа 2. Половинное деление 4

Работа 3. Итерации Ньютона 5

Работа 4. Интерполяция и аппроксимация 5

Работа 5. Квадратурные формулы 6

Работа 6. Метод Эйлера 7

Работа 7. Численное дифференцирование 7

Работа 8. Градиентный шаг 8

4. Комплексное учебное задание 9

5. Термины и понятия 9

6. Исходные данные и учебные примеры 9

7. Использованные источники 10

1. Назначение и организация практикума

Последовательное освоение погрешностей, решения уравнений, интерполяции, интегрирования и численного моделирования.

Указания предназначены для обучающихся по специальности 09.02.10 «Разработка компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности», квалификация — разработчик компьютерных игр, дополненной и виртуальной реальности.

Компонент	Учебная нагрузка
Индекс и наименование	ОП.04 Численные методы
Общий объём	66 академических часов
Практические занятия	40 академических часов
Промежуточная аттестация	Экзамен — семестр 4

Перед работой изучаются её исходные данные и проверяемые результаты. Затем выполняются последовательные действия, сопоставляется учебный пример и решаются самостоятельные варианты. Ответ включает ход работы и подтверждение результата. Использование готового примера без выполнения своего варианта не подтверждает освоение действия.

Подготовленные материалы: Таблицы итераций; Формулы и исходный код расчёта; Сравнение погрешностей и условий применимости.

2. Состав работ и представление результатов

Работа	Тема и результат
1	Погрешность и достоверные цифры. А: 0,02 и 0,4%.
2	Половинное деление. А: [1,40625;1,4375].
3	Итерации Ньютона. А: $x_1=1,5$; $x_2\approx1,416666667$.
4	Интерполяция и аппроксимация. А: 4.
5	Квадратурные формулы. А: трапеции 0,375, Симпсон 1/3.
6	Метод Эйлера. А: итог 1, совпадение с точным решением.
7	Численное дифференцирование. Для обеих функций центральная разность даёт точную производную в точной арифметике.
8	Градиентный шаг. А: новая точка (1;−0,5), значение 1,25.

В отчёте указываются тема, вариант, исходные данные, ход выполнения, проверка результата и вывод. Таблицы и графики снабжаются названиями и единицами измерения, где они применимы. Результаты оцениваются по критериям фонда оценочных средств. Приложите реализацию численного метода и таблицу вычислений.

3. Практические работы

Работа 1. Погрешность и достоверные цифры

Краткие теоретические сведения

Абсолютная погрешность измеряется в единицах величины, относительная — отношением к точному или принятому опорному значению. Округление промежуточных результатов способно увеличить итоговую ошибку.

Исходные данные

Опорное значение длины 8 м; измерено 8,04 м.

Порядок выполнения

1. Вычислить абсолютную погрешность.

2. Найти относительную погрешность и перевести в проценты.

3. Повторить вычисления с округлённым измерением 8,0 м.

4. Объяснить, почему округление записи не улучшает точность измерительного прибора.

Разбор учебного примера

$\Delta=0{,}04$ м; $\delta=0{,}04/8=0{,}005=0{,}5\%$. Запись 8,0 скрывает отклонение и не означает идеального измерения.

Задания для самостоятельного выполнения

А: опорное 5, измерено 5,02.

Б: опорное 12, измерено 11,94.

Проверка результата

— А: 0,02 и 0,4%.

— Б: 0,06 и 0,5%.

Вопросы для самоконтроля

1. Как выбрать опорное значение?

2. Почему относительную погрешность нельзя найти делением на ноль?

Работа 2. Половинное деление

Краткие теоретические сведения

Непрерывная функция с разными знаками на концах интервала имеет корень внутри. Каждый шаг уменьшает длину интервала вдвое; знак на середине определяет сохраняемую половину.

Исходные данные

$f(x)=x^2-3$, интервал [1;2], пять шагов.

Порядок выполнения

1. Проверить знаки на концах.

2. Рассчитать середину и значение функции.

3. Сохранить половину с переменой знака и повторить пять раз.

4. Оценить погрешность середины последнего интервала.

Разбор учебного примера

После пяти шагов остаётся [1,71875;1,75]; середина 1,734375, оценка ошибки $\leq 0{,}015625$.

Задания для самостоятельного выполнения

А: x^2-2 на [1;2], пять шагов.

Б: x^3-2 на [1;2], четыре шага.

Проверка результата

— А: [1,40625;1,4375].

— Б: [1,25;1,3125].

Вопросы для самоконтроля

1. Как изменится оценка при ещё одном шаге?

2. Почему проверка знаков не заменяет проверки непрерывности?

Работа 3. Итерации Ньютона

Краткие теоретические сведения

Касательная даёт новое приближение $x - f(x)/f'(x)$. Метод требует ненулевой производной и подходящего начального приближения; результат проверяют невязкой.

Исходные данные

$f = x^2 - 3$, $x_0 = 2$, два шага.

Порядок выполнения

1. Вычислить производную.

2. Записать формулу итерации.

3. Выполнить два шага с достаточным числом знаков.

4. Сравнить невязки до и после вычислений.

Разбор учебного примера

$x_1 = 1,75$; $x_2 \approx 1,732142857$; невязка после второго шага около 0,000319.

Задания для самостоятельного выполнения

А: $x^2 - 2$, $x_0 = 2$, два шага.

Б: объяснить отказ при $x_0 = 0$ для исходной функции.

Проверка результата

— А: $x_1 = 1,5$; $x_2 \approx 1,416666667$.

— Б: производная равна нулю, деление запрещено.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем невязка отличается от ошибки корня?

2. Всегда ли Ньютон быстрее по числу вычислений?

Работа 4. Интерполяция и аппроксимация

Краткие теоретические сведения

Интерполяция проходит через заданные узлы, аппроксимация минимизирует выбранную меру отклонения. Их назначение различается при шумных измерениях.

Исходные данные

Узлы (1;3),(3;7); найти значение при $x = 2$.

Порядок выполнения

1. Записать уравнение прямой через два узла.

2. Вычислить значение внутри интервала.

3. Проверить совпадение в исходных узлах.

4. Добавить шумную точку и объяснить выбор между интерполяцией и сглаживанием.

Разбор учебного примера

Прямая $y=2x+1$, значение при 2 равно 5. Подстановка $x=1$ и 3 возвращает исходные значения.

Задания для самостоятельного выполнения

А: узлы (0;2),(4;10), $x=1$.

Б: узлы (2;5),(6;1), $x=4$.

Проверка результата

— А: 4.

— Б: 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить экстраполяцию?

2. Почему полином высокой степени не всегда лучше?

Работа 5. Квадратурные формулы

Краткие теоретические сведения

Трапеции заменяют график отрезками, формула Симпсона — параболической моделью на паре интервалов. Для составной формулы Симпсона число равных интервалов должно быть чётным.

Исходные данные

Интеграл x^2 от 0 до 2; два интервала.

Порядок выполнения

1. Найти шаг и значения в узлах.

2. Вычислить сумму трапеций.

3. Применить формулу Симпсона.

4. Сравнить с точным интегралом 8/3.

Разбор учебного примера

Трапеции: $1\cdot(0/2+1+4/2)=3$. Симпсон: $1/3\cdot(0+4\cdot1+4)=8/3$.

Задания для самостоятельного выполнения

А: x^2 на [0;1], два интервала.

Б: линейная функция $2x+1$ на [0;2].

Проверка результата

— А: трапеции 0,375, Симпсон 1/3.

— Б: обе формулы дают 6.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему для линейной функции трапеции точны?

2. Как оценить влияние уменьшения шага?

Работа 6. Метод Эйлера

Краткие теоретические сведения

Шаг Эйлера использует производную в начале интервала. Накопление локальных ошибок исследуют сравнением нескольких шагов и, если возможно, с точным решением.

Исходные данные

$y' = 2t$, $y(0) = 1$; шаг $h = 0{,}5$ до $t = 1$.

Порядок выполнения

1. Составить таблицу t,y,f.

2. Выполнить два шага $y_{n+1} = y_n + h \cdot 2t_n$.

3. Найти точное значение из $y = t^2 + 1$.

4. Повторить с $h = 0{,}25$ и сравнить ошибки.

Разбор учебного примера

При $h = 0{,}5$ получаем $y(0{,}5) = 1$, $y(1) = 1{,}5$ вместо 2. При $h = 0{,}25$ итог 1,75, ошибка уменьшается с 0,5 до 0,25.

Задания для самостоятельного выполнения

А: $y' = 1$, $y(0) = 0$, $h = 0{,}2$ до 1.

Б: $y' = y$, $y(0) = 1$, два шага по 0,1.

Проверка результата

— А: итог 1, совпадение с точным решением.

— Б: итог 1,21, сравнить с e^0,2≈1,221403.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему нельзя использовать уже обновлённое время в явном шаге?

2. Что нужно фиксировать для воспроизводимости расчёта?

Работа 7. Численное дифференцирование

Краткие теоретические сведения

Центральная разность использует значения по обе стороны точки. Уменьшение шага сначала снижает ошибку аппроксимации, но очень малый шаг может усиливать влияние округления.

Исходные данные

$f(x) = x^3$, точка $x = 2$, шаг $h = 0{,}1$.

Порядок выполнения

1. Записать центральную разность.

2. Вычислить $f(2+h)$ и $f(2-h)$.

3. Сравнить с точной производной $3x^2$.

4. Повторить при $h = 0{,}01$.

Разбор учебного примера

При $h=0,1$: $(2,1^3-1,9^3)/0,2=12,01$ вместо 12; при $h=0,01$ получается 12,0001.

Задания для самостоятельного выполнения

А: $f=x^2$, $x=2$.

Б: $f=2x+3$, $x=1$.

Проверка результата

— Для обеих функций центральная разность даёт точную производную в точной арифметике.

— В отчёте отличают ошибку метода от машинного округления.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему слишком малый шаг не всегда лучше?

2. Какие значения функции нужны центральной разности?

Работа 8. Градиентный шаг

Краткие теоретические сведения

Градиент задаёт направление наибольшего роста; спуск выполняется в противоположном направлении. Размер шага влияет на устойчивость и скорость изменения.

Исходные данные

$f(x,y)=(x-2)^2+(y+1)^2$, старт (0;0), шаг 0,5.

Порядок выполнения

1. Найти частные производные.

2. Вычислить градиент в стартовой точке.

3. Выполнить обновление обеих координат по старым значениям.

4. Проверить новое значение функции.

Разбор учебного примера

Градиент (−4;2); новая точка (2;−1), функция равна 0. Это особый удачный шаг для данной квадратичной функции, а не универсальная гарантия за одну итерацию.

Задания для самостоятельного выполнения

А: шаг 0,25.

Б: шаг 1,5.

Проверка результата

— А: новая точка (1;−0,5), значение 1,25.

— Б: точка (6;−3), значение 20, что больше начального 5.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему координаты обновляют по одному исходному градиенту?

2. Как распознать слишком большой шаг?

4. Комплексное учебное задание

Реализуйте таблицу и программу сравнения двух численных методов для одной задачи. Используйте $f(x)=x^2-3$: сравните половинное деление и Ньютон по числу вычислений, невязке и условиям отказа. Приведите не менее трёх точностей и проверку начального приближения с нулевой производной.

Этапы и предъявляемые материалы

Этап	Результат
1	Таблицы итераций
2	Формулы и исходный код расчёта
3	Сравнение погрешностей и условий применимости

Выполненная работа представляется с исходными данными, объяснением принятых решений и проверками. Изменения исходного условия согласуются до выполнения расчётов или реализации. При защите обучающийся воспроизводит один основной и один граничный либо отрицательный сценарий и объясняет полученный результат.

Контроль готовности

— A: 0,02 и 0,4%.

— A: [1,40625;1,4375].

— A: $x_1=1,5$; $x_2\approx1,416666667$.

— A: 4.

— A: трапеции 0,375, Симпсон 1/3.

— A: итог 1, совпадение с точным решением.

— Для обеих функций центральная разность даёт точную производную в точной арифметике.

— A: новая точка (1;−0,5), значение 1,25.

5. Термины и понятия

Термин	Содержание
Абсолютная погрешность	Модуль отклонения от опорного значения.
Невязка	Значение функции уравнения на найденном приближении.
Шаг	Расстояние между соседними узлами расчёта.
Итерация	Повторение вычислительной процедуры с обновлением приближения.

6. Исходные данные и учебные примеры

Пример иллюстрирует деление отрезка пополам, метод Ньютона и метод Эйлера. Для самостоятельного варианта оформите таблицу итераций и сопоставьте результаты вычислений.

numerical_methods.py

```
def bisect(f, left, right, steps):
    if f(left)*f(right) >= 0:
        raise ValueError("opposite endpoint signs required")
    for _ in range(steps):
```

```
        middle = (left+right)/2
        if f(middle) == 0:
            return middle, middle
        if f(left)*f(middle) < 0:
            right = middle
        else:
            left = middle
    return left, right

f = lambda x: x*x-3
assert bisect(f, 1, 2, 5) == (1.71875, 1.75)
x = 2.0
for _ in range(2):
    x -= f(x)/(2*x)
assert abs(x-1.7321428571428572) < 1e-12
y, t, h = 1.0, 0.0, 0.5
for _ in range(2):
    y += h*2*t
    t += h
assert y == 1.5
print("bisection:", bisect(f, 1, 2, 5), "Newton:", x, "Euler:", y)
```

Сопоставьте результаты программы с таблицей итераций. Для самостоятельного варианта укажите начальные значения, число итераций и полученную погрешность.

7. Использованные источники

1. Воронцова, Н. В. Численные методы в программировании: учебное пособие для СПО / Н. В. Воронцова, Т. Н. Егорушкина, Д. И. Якушин. — 2-е изд. — Саратов, Москва: Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2024. — 125 с. — ISBN 978-5-4488-1973-5, 978-5-4497- 2867-8. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование: [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/138341

2. Пименов, В. Г. Численные методы. В 2 частях. Ч. 1: учебное пособие для СПО / В. Г. Пименов; под редакцией Ю. А. Меленцовой. — 3-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2024. — 111 с. — ISBN 978-5-4488-0398-7, 978-5-7996-2919-9. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование: [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/139655

3. Пименов, В. Г. Численные методы. В 2 частях. Ч. 2: учебное пособие для СПО / В. Г. Пименов, А. Б. Ложников ; под редакцией Ю. А. Меленцовой. — 3-е изд. — Саратов, Екатеринбург: Профобразование, Уральский федеральный университет, 2024. — 105 с. — ISBN 978-5-4488-0399-4, 978-5-7996-2894-9. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование: [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/139656

4. Богун, В. В. Численные методы. Исследование функций вещественного переменного с применением программ для ЭВМ: практикум для СПО / В. В. Богун. — Саратов: Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 84 с. — ISBN 978-5-4488-0735-0, 978-5-4497-0418-4. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROFобразование: [сайт]. — URL: https://profspo.ru/books/92643

5. Кондурар М. В. Методические указания к практическому занятию по численным методам. Тольятти, 2020. DOI: 10.31483/r-74538. URL: https://phsreda.com/e-articles/133/Action133-74538.pdf